4. *Clark D. S.* Necessary and sufficient conditions for the Robbins-Monro method.– Stochastic Processes Appl., 1984, v. 17, № 4, p. 359–367.
5. *Fabian V.* On asymptotic normality in stochastic approximation.– Ann. Math. Statist., 1968, v. 39, № 4, p. 1327–1332.
6. *Goldstein L.* On the choice of step size in the Robbins-Monro procedure.– Statist. Probab. Letters, 1988, p. 299–303.
7. *Heyde C. C.* On martingale limit theory and strong convergence results for stochastic approximation procedures.– Stochastic Processes Appl., 1981, v. 2, № 4, p. 359–370.
8. *Kersting G.* Almost sure approximation of the Robbins-Monro process by sums of independent random variables.– Ann. Probab., 1977, v. 5, № 6, p. 954–965.
9. *Клесов О. И.* Закон повторного логарифма для взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.– Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 2, с. 389–393.
10. *Köhnlein D.* Asymptotisches Verhalten von Lösungen stochastischer linearer Differenzengleichungen im R^d.– Bonn. Math. Schr., 1988, 190.
11. *Коростелев А. П.* Замечание о верхних функциях для процедур стохастической аппроксимации.– Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, в. 4, с. 769–775.
12. *Ljung L.* Strong convergence of a stochastic approximation algorithm.– Ann. Statist., 1978, v. 6, № 4, p. 806–811.
13. *McLeish D. L.* Functional and random central limit theorems for the Robbins-Monro process.– J. Appl. Probab., 1976, v. 13, № 1, p. 148–154.
14. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
15. *Révész P.* A note on the Robbins-Monro method.– Stud. Sci. Math. Hung., 1972, v. 7, № 4, p. 355–362.
16. *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method.– Ann. Math. Statist., 1951, v. 22, № 2, p. 400–407.
17. *Ruppert D.* Almost sure approximations to the Robbins-Monro and Kiefer-Wolfowitz processes with dependent noise.– Ann. Probab., 1982, v. 10, № 1, p. 178–187.
18. *Sacks J.* Asymptotic distribution of stochastic approximation procedures.– Ann. Math. Statist., 1958, v. 29, № 2, p. 373–405.
19. *Walk H.* A stochastic Remes algorithm.– J. Approximation Theory, 1987, v. 49, p. 79–92.
20. *Walk H.* Stochastische Approximation. Unpublished manuscript.

ЭЛТОН ДЖ., ХИЛЛ Т. П.[1]*

ФУЗИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ; ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ СООБЩЕНИЕ

Цель этой заметки ввести понятие *фузии* (сосредоточения) вероятностного распределения P и анонсировать некоторые результаты, относящиеся к классу свойств фузий и их связи с классическими вероятностными концепциями, такими как выпуклое доминирование, мажоризация, мартингализуемость и деляция. Доказательства этих результатов будут опубликованы позже (см. [4], [5]).

В этом сообщении X будет обозначать либо сепарабельное банахово пространство, либо компактное метризуемое выпуклое подмножество локально выпуклого

* Georgia Institute of Technology, School of Mathematics, Atlanta, Georgia 30332.

Elton J. and Hill T. P. Fusions of a Probability Distribution; Preliminary Announcement.

[1] При частичной поддержке National Science Foundation, Grants DMS-87-01691, DMS-89-01267 и DMS-89-14344; а также Fulbright Research Grant.

Robbins-Monro method.-
sation. - Ann. Math. Sta-
onro procedure.– Statist.
ence results for stochas-
1981. v. 2. № 4, p. 359–
nro process by sums of
, p. 954–965.
ых сумм независимых
вероятн. и ее примен.,
hastischer linearer Dif-
оцедур стохастической
XVIII, в. 4, с. 769–775.
lgorithm.– Ann. Statist.,
for the Robbins-Mon-
Наука, 1972, 416 с.
Math. Hung., 1972, v. 7,
– Ann. Math. Statist.,
o and Kiefer-Wolfowitz
№ 1, p. 178–187.
tion procedures.– Ann.
Theory, 1987, v. 49.
it.

ИЙ;

) вероятностного рас-
иеся к классу свойств
ями, такими как вы-
зация. Доказательства

е банахово простран-
локально выпуклого

tlanta, Georgia 30332.
Preliminary Announce-

rants DMS–87–01691,
nt.

топологического векторного пространства (л. в. т. в.п.), X^* будет обозначать сопряженное пространство непрерывных линейных функционалов (их сужение на X в последнем случае). Для подмножества A множества X функция I_A будет обозначать индикаторную функцию A, A^c – дополнение A, $\operatorname{co}(A)$ – выпуклую оболочку A, $\bar{A}$ и $\mathring{A}$ – соответственно замыкание и внутренность A, а ∂A – границу $\bar{A}\setminus\mathring{A}$ множества A. Последовательность x_n в X сходится *слабо* к x (обозначается $x_n \xrightarrow{w} x$), если $f(x_n)\to f(x)$ для всех $f\in X^*$, и *сильно* сходится к x $(x_n\to x)$, если x_n сходится к x в сильной топологии. Если X нормировано, то $\|x\|$ обозначает норму элемента x.

Обозначим $\mathscr{B}$ совокупность борелевских подмножеств X, $\mathscr{P}$ – множество борелевских вероятностных мер на $(X, \mathscr{B})$, $\delta(x)\in\mathscr{P}$ – дельта-меру Дирака на $\{x\}$ (атом с единичной массой в точке x), B^n – совокупность борелевских подмножеств n-мерного евклидова пространства R^n, а $\operatorname{supp} P$ для $P\in\mathscr{P}$ будет обозначать носитель меры P. Для $A\in\mathscr{B}$ символ $P|_A$ определяется соотношением $P|_A(B)=P(A\cap B)$. Слабая сходимость последовательности мер $\{P_n\}$ к мере P $(P_n \xrightarrow{w} P)$ означает обычную слабую сходимость мер в смысле [2]. На протяжении всей статьи P всегда будет обозначать элемент множества $\mathscr{P}$, т. е. борелевскую вероятностную меру на $(X, \mathscr{B})$, а $\mathscr{L}(Y)\in\mathscr{P}$ – распределение X-значного случайного вектора Y. Пусть $A\in\mathscr{B}$ и $P\in\mathscr{P}$. Если X – сепарабельное банахово пространство, то будем говорить, что *множество A имеет конечный первый P-момент*, если $\int_A \|x\|\,dP(x)<\infty$, а если X – компактное метризуемое выпуклое подмножество л. в. т. в. п., то будем говорить, что A всегда имеет конечный P-момент. Для Q и $P\in\mathscr{P}$, *P выпукло доминирует Q* (обозначается $P \overset{c}{\geq} Q$), если $\int \Phi\,dP \leqslant \int \Phi\,dQ$ для всех непрерывных выпуклых функций Φ для которых оба интеграла существуют.

Предложение 1. *Если $P(A)>0$ и A имеет конечный первый P-момент, то существует единственный элемент $b=b(A;\ P)\in\overline{\operatorname{co}}(A)$ называемый P-барицентром множества A, для которого*

$$f(b)=\frac{1}{P(A)}\int_A f\,dP \text{ для любого } f\in X.$$

Определение. Мера $Q\in\mathscr{P}$ называется *элементарной фузией* меры P, если существует $A\in\mathscr{B}$ с конечным первым P-моментом, и $t\in[0, 1]$, такие, что Q представимо в виде $dQ=I_{A^c}dP+tP(A)\ d\delta(b(A, P))+(1-t)I_A dP$. Мера Q называется *простой фузией* меры P, если существует натуральное число n и вероятностные меры $\{P_j\}_{j=0}^{n}\in\mathscr{P}$, такие, что $P_0=P$, $P_n=Q$, и P_{j+1} является элементарной фузией P_j для любого $j=0,\ldots$ $\ldots, n-1$. (Иными словами, простая фузия является просто конечной композицией элементарных фузий.) Обозначим $\mathscr{F}(P)$ класс простых фузий меры P. Мера Q является *фузией* P, если существует последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{F}(P)$, такая, что $P_n \xrightarrow{w} P$, при этом $\mathscr{F}(P)$ обозначает класс всех фузий P. Таким образом, $\mathscr{F}(P)$ – слабое замыкание множества конечных композиций элементарных фузий P.

На интуитивном уровне это можно представить так: элементарная фузия просто берет часть (долю t) от массы сосредоточенной на множестве A и сосредотачивает ее в барицентре A, образуя при этом (или увеличивая) атом в этой точке и пропорционально уменьшая меру всюду на A. Как и при определении основных «строительных» блоков (индикаторных функций) для измеримой функции, когда вместо общих измеримых множеств можно обычно ограничиться существенно более узким классом (например диадичными открытыми интервалами в контексте R^1), так и при определении основных «строительных» блоков (элементарных фузий) при построении фузии можно ограничиться существенно более узким классом множеств, например относительно компактными или ограниченными множествами. Однако в данной работе при определении элементарной фузии мы будем рассматривать произвольные множества (среди множеств с конечным первым P-моментом). Заметим, что, по определению, мера P

является элементарной фузией по отношению к самой себе, не сосредотачивая никакой части меры и давая в результате само P).

Пример 1. Пусть P – чисто атомистическая мера, имеющая ровно два атома массы p и $1-p$ в точках α_1 и α_2, соответственно. Тогда $\mathscr{F}(P)=\{Q\in\mathscr{P}\colon \operatorname{supp} Q\subseteq[\alpha_1, \alpha_2]$ и $b(X; Q)=\alpha_1 p+\alpha_2(1-p)\}$.

Пример 2. Пусть $X=\mathbb{R}^1$, а P – распределение Коши. Тогда $\mathscr{F}(P)=\mathscr{P}$.

Пример 3. Пусть $X=C[0, 1]$ – банахово пространство непрерывных вещественнозначных функций на $[0, 1]$ наделенных нормой супремума, P – винеровская мера на X, а A – дополнение в X единичного шара $\{x\in X\colon \|x\|\leqslant 1\}$. Если Q – элементарная фузия меры P, образованная сосредоточением всей массы (т. е. при $t=1$) множества A, тогда Q является распределением вещественнозначного стохастического процесса начинающегося в нуле, который с вероятностью $P(A)$ никогда не покидает начало координат, а с вероятностью $1-P(A)$ выглядит как броуновское движение при условии, что все выборочные траектории остаются в интервале $[-1, 1]$.

Теорема 1. *$\mathscr{P}(P)$ и $\mathscr{F}(P)$ – выпуклы.*

Теорема 2. *Если $Q\in\mathscr{F}(P)$ и $R\in\mathscr{F}(P)$, то $R\in\mathscr{F}(P)$. (Т. е. отношение порядка для фузий транзитивно.)*

Следующий результат, который можно рассматривать как обобщение неравенства Йенсена, говорит о том, что если Q фузия для P, то Q выпукло доминируется P. Обратное, вообще говоря, неверно (см. пример в [1]).

Теорема 3. *Если $Q\in\mathscr{F}(P)$, то $Q\overset{c}{\leqslant}P$.*

Теорема 4. *Если P-борелевская вероятностная мера на сепарабельном банаховом пространстве X, такая, что P имеет конечный первый момент (т. е. $\int\|x\|dP<\infty$), то $\mathscr{F}(P)$ плотно. Более того, если X конечномерно, то P имеет конечный первый момент тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}(P)$ плотно.*

Из примера 2 видно, что если $Q\in\mathscr{F}(P)$ и $P\in\mathscr{F}(Q)$, то тем не менее может оказаться, что $P\neq Q$. Если, однако, меры имеют конечный первый момент, то этого быть не может.

Теорема 5. *Если $Q\in\mathscr{F}(P)$, $P\in\mathscr{F}(Q)$ и хотя бы одна из мер имеет конечный первый момент, то $P=Q$.*

Теорема 6. *Если P и Q – борелевские вероятностные меры на X, а X – сепарабельное банахово пространство или метризуемое выпуклое подмножество локально выпуклого топологического векторного пространства, и если P имеет конечный первый момент, то следующие свойства эквивалентны:*

(i) Q является фузией для P;

(ii) $Q\overset{c}{\leqslant}P$;

(iii) (Q, P) мартингализуемо;

(iv) существует дилляция μ пространства X, такая, что $P=\mu Q$.

Замечание. Эквивалентность (ii), (iii) и (iv), в предположении что P имеет конечный барицентр, была частично доказана Харди, Литтлвудом и Пойа для одномерных пространств, Блеквеллом [1], Стейном и Шерманом для конечномерных пространств, и Картье, Феллом, Мейером [3] и Штрассеном [9] в различных бесконечномерных постановках (см. [7]). Основной вклад данной заметки в приведенную выше теорему состоит в утверждении об эквивалентности (i) и (ii)–(iv).

Теорема 7. *Если P – борелевская вероятностная мера на сепарабельном банаховом вероятностном пространстве, то P имеет конечный первый момент тогда и только тогда, когда семейство $\mathscr{F}(P)$ равномерно интегрируемо. Более обще, если функция $\Phi\colon [0, 1]\to[0, \infty)$ является выпуклой, непостоянной и неубывающей, то $\int\Phi(\|x\|)\,dP<\infty$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}(P)$ равномерно Φ-интегрируемо.*

В случае, когда $X=\mathbb{R}^1$ и P имеет конечный первый момент, известен ряд дополнительных условий, эквивалентных наличию фузии. В следующей теореме приводятся некоторые из них. Напомним, что *максимальная функция Харди – Литтлвуда H_P* для меры P определяется как $H_P:=(1-t)^{-1}\int_t^1 F^{-1}(s)\,ds$ для $0\leqslant t\leqslant 1$ (где F^{-1} – обобщенная обратная функция распределения меры P, задаваемая соотношением $F^{-1}(s)=\inf\{x\colon P(-\infty, x]>s\}$ для $s\in[0, 1]$, а *потенциальная функция* U_P меры P определяется как $U_P(t)=-\int|x-t|P(dx)$ (см. в [11] свойства и применения этих функций). Кроме того, говорят, что $Q\in\mathscr{P}$ *меньше в смысле оставшегося времени жизни*, чем P, если $\int(x-t)^+Q(dx)\leqslant\int(x-t)^+P(dx)$ для всех вещественных t. (Это упорядочение применяется в теории очередей, см. [3].)

Теорема 8. *Если $X=\mathbb{R}^1$ и $P\in\mathscr{P}$ имеет конечный первый момент, то следующие условия эквивалентны:*

(*i*) *Q является фузией для P;*

(*ii*) $Q\overset{c}{\leqslant}P$;

(*iii*) *(Q, P) мартингализуемо;*

(*iv*) *существует дилляция μ пространства X, такая, что $P=\mu Q$;*

(*v*) *$H_Q\leqslant H_P$ и $b(X, P)=b(X, Q)$;*

(*vi*) *$U_Q\geqslant U_P$ и $b(X, P)=b(X, Q)$;*

(*vii*) *Q меньше P в смысле оставшегося времени жизни и $b(X, P)=b(X, Q)$;*

(*viii*) *$\int(x\vee t)\,Q(dx)\leqslant\int(x\vee t)\,P(dx)$ для всех t и $b(X, P)=b(X, Q)$;*

(*ix*) $$\int_{-\infty}^{t}Q(-\infty, t]\,dt\leqslant\int_{-\infty}^{t}P(-\infty, t]\,dt \text{ для всех } t \text{ и } b(X, P)=b(X, Q).$$

Определение. Для борелевской вероятностной меры P с конечным первым моментом на сепарабельном банаховом пространстве функция $r_P\colon[0, \infty)\to[0, \infty)$, задаваемая соотношением

$$r_P(\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\|x\|\geqslant\lambda}\|x\|\,dP/P(\|x\|\geqslant\lambda), & \text{если } P(\|x\|\geqslant\lambda)>0,\\ \lambda, & \text{если } P(\|x\|\geqslant\lambda)=0,\end{cases}$$

называется *характеристикой меры P*.

Теорема 9. *Пусть $(Z_1, \ldots, Z_n)$ — неотрицательный субмартингал на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Тогда*

$$\int_{Z_1\geqslant r_P(\lambda)}Z_1\,dP\leqslant\int_{Z_n\geqslant\lambda}Z_n\,dP \text{ для всех } \lambda\geqslant 0.$$

Применение. Многие идеальные физические законы описывают линейные смеси или фузии различных типов; один из них — закон смеси концентраций, другой — закон Рауля в физической химии: «давление насыщенного пара компонент идеальной жидкости пропорционально мольным долям компонент».

Пусть x представляет переменное «качество» (такое как концентрация, или давление насыщенного пара) некоторой субстанции, которая смешивается линейно. Предположим далее, что производство единицы качества x стоит $c(x)$, а может быть продано за $r(x)$. Какому распределению должно следовать производство этой субстанции и как нужно смешивать, чтобы получить максимальный доход? Другими словами, если производство осуществляется в соответствии с распределением P, а затем концентрируется до распределения Q, то какими должны быть P и $Q\in\mathscr{F}(P)$, чтобы максимизировался средний доход $\int r\,dQ-\int c\,dP$? (В приведенных ниже применениях X является компактным выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^n$.)

Определение. Для борелевских функций $r, c\colon X\to\mathbb{R}$ пара (Q, P) является (r, c)-*оптимальной*, если $\int r\,dQ-\int c\,dP=\sup\left\{\int r\,d\hat{Q}-\int c\,d\hat{P}\colon \hat{P}\in\mathscr{P},\ \hat{Q}\in\mathscr{F}(\hat{P})\right\}$.

Определение. Для функции $f\colon X\to\mathbb{R}$ обозначим через $\bar{f}$ *выпуклое замыкание* f, т. е. $\bar{f}(x)=\sup\{g(x)\mid g\colon X\to\mathbb{R},\ g \text{ выпукла и } g\leqslant f\}$.

Теорема 10. *Пусть* $r, c: X \to \mathrm{R}$ *полунепрерывны сверху и снизу, соответственно. Тогда* $(\delta(x^*), \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \delta(x_j^*))$ *является* (r, c)*-оптимальной, если* x^* *любая точка из* X, *удовлетворяющая равенству* $r(x^*) - \bar{c}(x^*) = \max\{r(x) - \bar{c}(x) : x \in X\}$, *а* $\{(x_j^*, \bar{c}(x_j^*))\}_{j=1}^{n}$ *— любые экстремальные точки выпуклого множества* $\{(x, y) \in \mathrm{R}^{n+1} : x \in X, y \in \mathrm{R}, y \geqslant \bar{c}(x)\}$, *удовлетворяющие условию* $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j (x_j^*, \bar{c}(x)_j)^* = (x^*, \bar{c}(x^*))$ *для некоторых* $\{\alpha_j\}_1^{n+1} \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1$.

Замечание. Недавно авторами было показано, что если меры P и Q конечные (т. е. не обязательно вероятностные) меры на X (где X – опять сепарабельное банахово пространство или компактное метризуемое подмножество л. в. т. в. п.), то $\int \Phi \, dQ \leqslant \int \Phi \, dP$ для всех *неотрицательных* непрерывных выпуклых функций тогда и только тогда, когда существует фузия $\widehat{P}$ меры P_1, мажорирующая Q. Этот результат является новым даже в конечномерном случае, а в его доказательстве используются новые геометрические соображения в духе Харди, Литтлвуда и Пойа.

Авторы благодарны National Science Foundation и Georgia Tech Foundation за поддержку поездки второго автора для представления этих результатов на Втором всемирном конгрессе общества им. Бернулли в Упсале в августе 1990 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blackwell D.* Equivalent comparisons of experiments.– Ann. Math. Stat., 1953, v. 24, p. 265–272.
2. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
3. *Cartier P., Fell J., Meyer P.* Comparison des measures porte et par un ensemble convexe compact.– Bull. Soc. Math. Fr., 1964, v. 92, p. 435–445.
4. *Elton J., Hill T.* Fusions of a probability distribution.– Annals of Probability (to appear).
5. *Elton J., Hill T.* Convex domination, dilation, and fusion of general finite measures (in preparation).
6. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983, 574 с.
7. *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968, 112 с.
8. *Stoyan D.* Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models. New York: Wiley, 1983.
9. *Strassen V.* The existence of probability measures with given martingals.– Ann. Math. Stat., 1965, v. 36, p. 423–439.
10. *Tong Y.* Probability Inequalities in Multivariate Distributions. New York: Academic Press, 1980.
11. *Van der Vecht D.* Inequalities for Stopped Brownian Motion. Amsterdam: CWI Tract 21, 1986.